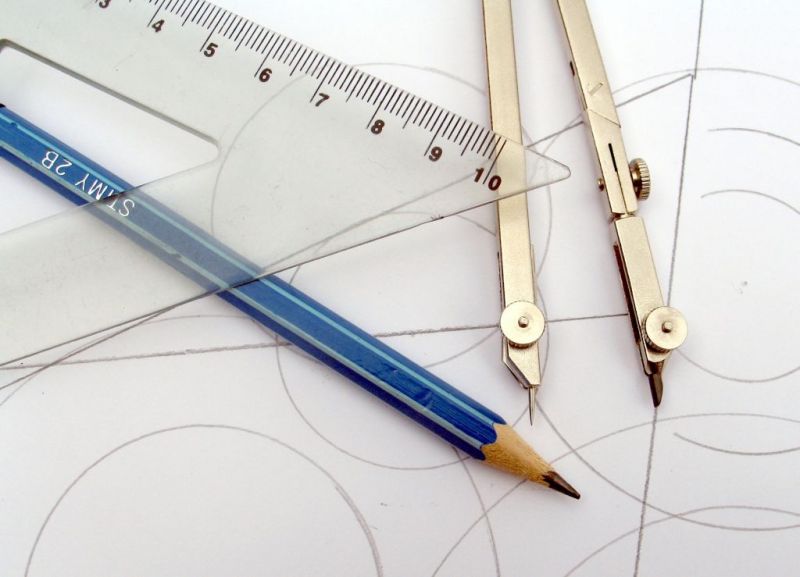
Учебно-методическое пособие по курсу

**«Алгебра и начала анализа»**

[](http://kvantor.ucoz.ru/_dr/0/57812236.jpg)

Государственный образовательный стандарт по предмету «математика», используемый в профессио­нальном образовании, в части государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников, регламентирует максимальный объем учебной нагрузки учащегося и объем обязательной учебной нагрузки по предмету, поэтому появилась возможность планировать самостоятельную работу обучающихся по специальности 13.02.1«Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям) ».

Для более тщательного и полного выполнения обучающимися данной работы встала необходимость в методических указаниях и индивидуальных вариантах контрольных работ.

**Введение**

Математика - это наука, изучающая пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В то же время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому основной задачей курса математики в образовательных заведениях среднего профессионального образования является обеспечение обучающихся математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин.

Теоретический материал, который содержится в каждом методическом пособии, призван систематизировать и обобщить имеющиеся у учащихся знания по уже изученной теме. Разобранные и решённые типовые примеры позволяют учащимся вспомнить основные приёмы и методы решения того или иного примера, сформировать алгоритм действий при выполнении заданий.

Предусмотренная индивидуальность (30 вариантов) контрольной работы помогает определить полноту и прочность знаний каждого учащегося, умения применять полученные знания при решении практических задач, а также навыков самостоятельной работы с учебной литературой, и что немаловажно, позволяют учитывать темп работы каждого учащегося.

Каждая контрольная работа состоит из нескольких заданий, (каждое задание может содержать в себе несколько примеров). Задания для выполнения индивидуальных домашних контрольных работ отвечают следующим требованиям: - охватывают основные вопросы материала (по разделам и темам); - степень сложности всех вариантов заданий одинакова;

Новизна предлагаемого учебно-методического пособия обусловлена тем, что имеющаяся в продаже литература, а также информационные ресурсы в сети Internet, не предлагают комплектности и системности таких разработок как по объёму , так и по содержанию.

**Общие методические рекомендации при изучении темы**

*Изучение материала по учебнику*

При самостоятельном изучении материала полезно вести конспект. В конспект по мере проработки материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультации. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет в подготовке к выполнению контрольной работы.

*Решение задач*

Чтение учебника должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления

располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и других математических констант.

*Консультации*

При изучении теоретического материала или при решении задач у обучаюшегося могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается. В такой ситуации следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации, при этом следует указать характер затруднения, привести план решения.

*Контрольная работа*

В процессе изучения темы обучающийся должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам обучающийся может сделать выводы о степени усвоения им темы, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению следующей темы.

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебно-методическом комплексе задач решений с ответами.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – обучающегося с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

**Содержание учебно – методического пособия**

**Тема 1:** Показательная функция

**Тема 2:** Логарифмическая функция;

**Тема 3:** Степенная функция;

**Тема 4:** Тригонометрические функции;

**Тема 5:** Тригонометрические уравнения;

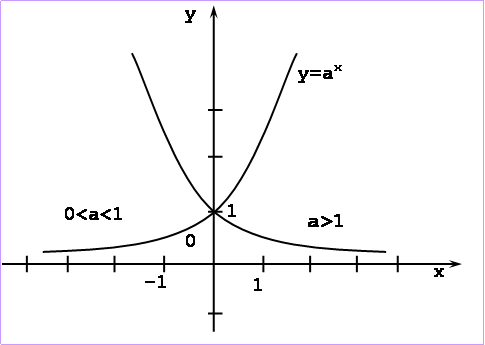
**Тема 6:** Вычисление производной функции;

**Тема 7:** Применение производной функции;

**Тема 8:** Первообразная функции и интеграл;

**Тема 9:** Элементы теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики;

**1 Содержание темы «Показательная функция»**

*[](http://specialitet.ru/math/s/gr1.files/image010.gif)*

*Степень с действительным и рациональным показателем:*

Степень с действительным и рациональным показателем. Арифметический корень натуральной степени.

*Показательная функция, ее свойства и график*

Определение и график показательной функции, три основных свойства показательной функции

*Показательные уравнения:*

Определение и вид показательных уравнений, алгоритм решения показательных уравнений.

*Показательные неравенства:*

Определение и вид показательных неравенств, алгоритм решения показательных неравенств.

# Основные сведения из теории

* 1. ***Основные свойства степени:***

Определение:

ах = а · а · а · ··· · а , где ах –степень,

а – основание степени

х раз n – показатель степени

1. а0 = 1 , а ≠ 0 5) 
2. а-n = , а ≠ 0 6) 
3.  7) 
4.  8)

***1.2. Показательная функция, её свойства и график***

Определение: Функцию у=ах, где а>0, а≠1, называют показательной функцией.

Свойство 1: Область определения показательной функции у=ах – множество R всех действительных чисел.

Свойство 2: Множество значений показательной функции у=ах – множество положительных чисел.

Свойство 3: Показательная функция у=ах является возрастающей, если а>1, и убывающей, если 0<а<1.

у=ах

0<а<1

у=ах

а>1

***1.3 Решение показательных уравнений***

Определение: Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени.

Теорема: Если **ах=ав**, где а>0, а≠1, то **х = в**

***1.4 Решение показательных неравенств***

Определение: Показательным неравенством называется неравенство, в котором неизвестное содержится в показателе степени.

Теорема: Если **ах>ав**, где, а≠1, то

1. Если а>0, то **х > в, то есть знак сохраняется**
2. Если а<0, то **х < в, то есть знак меняется**

2. Примеры и упражнения

**Пример 1:** Упростить выражение:

1) 

2) 

**Пример 2:** Решить показательное уравнение: 4х-8=64

Решение:

4х-8=43

х-8=3

х=3+8

х=11

Ответ :х=11

**Пример 3:** Решить показательное уравнение: 3х+2+3х=90

Решение:

3х·32+3х=90 t=9

Пусть 3х=t,t>0 3х=9

t·32+t=90 3х=32

9t+t=90 х=2

10t=90 Ответ: х=2

t=

t=9

**Пример 4**: Решить показательное уравнение: 2х-1+2х=6

Решение:

+2х=6

Пусть 2х=t,t>0 t=

+t=6 t=4

+t=6 2х=4

 2х=22

1t+2t=12 х=2

3t=12 Ответ: х=2

**Пример 5** : Решить показательное уравнение: 3х+1-4·3х-2=69

Решение:

3х·31-4·=69

Пусть 3х=t,t>0 t=

t·31-4·=69 t=27

3t-=69 3х=27

 3х=33

27t-4t=621 х=3

23t=621 Ответ: х=3

**Пример 7**: Решить показательное неравенство:23х-5>16

Решение:

23х-5>24, т.к. 2>1, то знак сохраняем

3х-5>4

3х>4+5

3х>9

х>

х>3, Ответ: х>3

**Пример 8:** Решить показательное неравенство: 3х+2+3х-1<28

Решение:

3х·32+<28

Пусть 3х=t,t>0 t<

t·32+<28 t<3

9t+<28 3х<3

 3х<31, т.к.3>1, то знак сохраняем

27t+t<84 х<1

28t<84 Ответ: х<1

**Варианты контрольной работы**

**Задание 1.1:** Упростить выражения

**Вариант 1:**  **Вариант 2:** 

**Вариант 3:**  **Вариант 4:** 

**Вариант 5:  Вариант 6:** 

**Вариант 7:** ** Вариант 8:** 

**Вариант 9:** ** Вариант 10:** ****

**Задание 1.2:** Решить показательное уравнение

**Вариант 1:**

|  |  |
| --- | --- |
| 3х+1=1 | 3х-2· 3х-2=7 |

**Вариант 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| 4х+516 | 9· 3х-1+3х=36 |

**Вариант 3:**

|  |  |
| --- | --- |
| 4х=1 | 3х+2+3х=810 |

**Вариант 4:**

|  |  |
| --- | --- |
| 32х=3 | 4·3х+2+5·3х+1 -6·3х=5 |

**Вариант 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| 3х=27 | 4х-3· 4х-2=13 |

**Вариант 6:**

|  |  |
| --- | --- |
| 3х·32=9 | 4· 3х-1+3х+1=117 |

**Вариант 7:**

|  |  |
| --- | --- |
| 17х=1 | 2х+1+2х-1=5 |

**Вариант 8:**

|  |  |
| --- | --- |
| 13х+1=13 | 2х+1+5·2х-2=104 |

**Вариант 9:**

|  |  |
| --- | --- |
| 4х=256 | 7х-7х-1=6 |
| **Вариант 10:**  28х=16 | 5х+1-3·5х-2=122 |

**Задание 1.3:** Решить показательное неравенство

**Вариант 1:**8-2х< 64 **Вариант 6:** 2х+4-2х>120

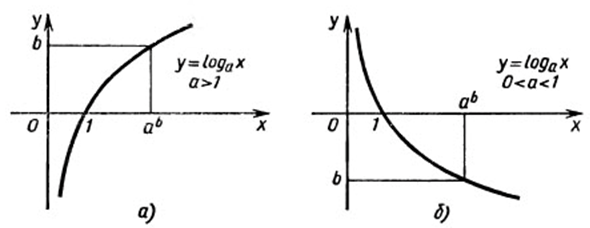
**Вариант 2:** 31-х<  **Вариант 7:** ( )4+6х< 3х-3

**Вариант 3:** 22х+1>8 **Вариант 8:** 8·2х-1-2х>48

**Вариант 4:** ()х+1< **Вариант 9:** 102+х< 100000

**Вариант 5:** 42х+1>4 **Вариант 10:** 2х+1+2х-1<5

**2.Содержание темы «Логарифмическая функция»**

**

*Определение логарифма, свойства логарифмов*

Определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Обозначение десятичного и натурального логарифма;ознакомиться с таблицей Брадиса. Десятичные и натуральные логарифмы .

*Логарифмическая функция и ее график*

Вид логарифмической функции, её основные свойства. Построение графика логарифмической функции с данным основанием.

*Логарифмические уравнения*

Виды логарифмических уравнений, основные приёмы решения

логарифмических уравнений

*Логарифмические неравенства*

Виды логарифмических неравенств, основные приёмы решения

логарифмических неравенств

# Основные сведения из теории

* 1. ***Основные свойства логарифма***

Определение: Логарифмом числа х по основанию а, где а>0, а≠1, называется показатель степени, в которую надо возвести число а, чтобы получить число х.

Определение: Действие нахождения логарифма числа называют логарифмированием.

Обозначение: logах (логарифм числа х по основанию а)

а - основание логарифма

logах=в, то х=ав

Основные свойства:

1. logаа =1
2. logа1=0
3. а logах=х (х>0,a>0, а≠1, основное логарифмическое тождество)

Теорема: Пусть а>0, а≠1, х>0, х1>0, х2>0, р- любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

1. logах1+ logах2= logа(х1·х2)
2. logах1-logах2= logа()
3. logахр=р·logах

***2.2. Логарифмическая функция,***

***её свойства и график***

Определение: Функцию у= logах, где а>0, а≠1, называют логарифмической функцией.

Свойство 1: Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел.

Свойство 2: Множество значений логарифмической функции – множество всех R действительных чисел.

Свойство 3: Логарифмическая функция является возрастающей, если а>1, и убывающей если 0<a<1.

у= logах

0<а<1

у= logах а>1

***2.3 Решение логарифмических уравнений***

Теорема: Пусть а>0, а≠1. Пусть дана функция у =f(х) и действительное число b. Тогда уравнение logа f(х)=b и уравнение f(х)=аb равносильны.

***2.4 Решение логарифмических неравенств***

Теорема: Пусть а>0, а≠1, х1>0, х2>0 Если logаf(х)>b, то

1) при а>1 f(х)>ab (**знак сохраняем**)

2) при 0<a<1 f(х)<ab (**знак меняем**)

Алгоритм решения логарифмического неравенства logаf(х)>b:

* Найти О.О.Ф. (область определения функции)

О.О.Ф.: под логарифмическое выражение строго больше нуля (f(х)>0);

* По основанию логарифма определить сохранность знака;
* Решить непосредственно само логарифмическое неравенство;
* Составить систему из двух неравенств (П.1+П.3)
* Решить данную систему, совместив оба решения на числовой оси.

2. Примеры и упражнения

**Пример 1:** Вычислить

1. log232=5, т.к. 25=32
2. log2=-5, т.к. 2-5=
3. log618+ log62= log6(18·2)= log636=2
4. log1248- log124= log1212= 1

**Пример 2:** Решить логарифмическое уравнение: log6(3х+15)=2

Решение:

3х+15=62

3х+15=36

3х=36-15

3х=21

х=

х=7 Ответ:х=7

**Пример 3:** Решить логарифмическое уравнение: log3(х2-6х+17)=2

Решение:

х2-6х+17=32

х2-6х+17=9

х2-6х+17-9=0

х2-6х+8=0

а=1, b=-6, с=8

х1,2= ==

х1= х2=

Ответ: х1=4, х2=2

**Пример 4** : Решить логарифмическое уравнение: log2(х-5) +log2(х+2)=3

Решение:

log2(х-5)·(х+2)=3

(х-5)·(х+2)=23

х2+2х-5х-10=8

х2+2х-5х-10-8=0

х2-3х-18=0

а=1, b=-3, с=-18

х1,2= =

х1= х2=

Примечание: В уравнениях данного вида необходимо выполнить проверку.

Проверка:

1) х1=6

log2(6-5) +log2(6+2)= log21 +log28=0=3=3

3=3

2) х2=-3-неуд

log2(-3-5) +log2(-3+2)= log2(-8) +log2(-1) ( формула logах1+ logах2= logа(х1·х2)

справедлива при а>0, а≠1, х>0, х1>0, х2>0)

корень х2=-3 является посторонним.

Ответ: х=6

**Пример 6**: Решить логарифмическое неравенство: log2(3х-4)>5

Решение:

1) О.О.Ф.: 3х-4>0 2) т.к.2>1, то знак сохраняем 3) х>

3х>0+4 3х-4>25 х>12

3х>4 3х-4>32

х> 3х>32+4

12



х> 3х>36

х>

х>12

Ответ: х>12

**Варианты контрольной работы**

**Задание 2.1:** Вычислить

**Вариант 1:** log312+log34,5-log36 **Вариант 6:** 3log32 ·log55+3log416

**Вариант 2:** Log524-log5120-log55 **Вариант 7:** log312+log34,5-log36

**Вариант 3:** 7log721 **Вариант 8:** Log1/525·log1664

**Вариант 4:** 4log23 **Вариант 9:** Log62+log63+2log24

**Вариант 5:** Log2216·log525-3log24 **Вариант 10:** Log212-log23+3log38

**Задание 2.2:** Решить логарифмическое уравнение

**Вариант 1:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log10(2-x)=log10(x-6) | Log3x+log3(x+2)=1 |

**Вариант 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log3(4x-3)=2 | (log3x)2-6log3x+9=0 |

**Вариант 3:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log5(2x+7)=log5(x-3) | Log7(5-x)+log72=1 |

**Вариант 4:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log1/2(3x-1)=-3 | Log7(x2-2x-8)=0 |

**Вариант 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log3(4x-3)=2 | Log1/2(x2+4x-5)=-4 |

**Вариант 6:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log2(3x-4)=3 | Log1/2(x2-5x+6)=-1 |

**Вариант 7:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log2(2x-1)=3 | Log2(x2-4x+4)=4 |

**Вариант 8:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log3(2x+1)=log339 | Log3(x-2)+log3(x+6)=2 |

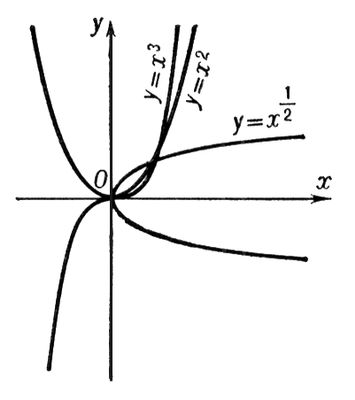
**Вариант 9:**

|  |  |
| --- | --- |
| Log1/2(3x-1)=-3 | Log4(13+x)+log4(4-x)=2 |
| **Вариант 10:**  Log2(7x-4)=log252 | (log2x)2-9log2x+10=0 |

**Задание 2.3:** Решить логарифмическое неравенство

**Вариант 1:** Log7(2x-1)< 2 **Вариант 6:** Log2(2x-3)< 3

**Вариант 2:** Log100,5x<-2 **Вариант 7:** Log2(2x+3) >2

**** **Вариант 3:** Log2(x-4) >1 **Вариант 8:** Log5(x-1) >1

**Вариант 4:** Log1/3(2x-7) >-2 **Вариант 9:** Log3(2x-1)< 3

**Вариант 5:** Log4(3-2x)< 2 **Вариант 10:** Log10x >2

**3 .Содержание темы «Степенная функция»**

*Определение и свойства степенной функции.*

Свойства и графики различных случаев степенной функции. Сравнение чисел, решение неравенств с помощью графиков и (или) свойств степенной функции.

*Иррациональные уравнения.*

Определение равносильных уравнений, следствия уравнения; при каких преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение, при каких получаются посторонние корни, при каких происходит потеря корней; Определение иррационального уравнения;

*Иррациональные неравенства.*

Определение иррационального неравенства; алгоритм решения этого неравенства

*Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными.*

Алгоритмы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными.

# Основные сведения из теории

* 1. ***Определение и свойства степенной функции***

Определение: Функцию у=хр, где р - заданное действительное число, называют степенной функцией.

Свойство 1: Степенная функция у=хр для любого рR определена при х>0

Свойство 2: Множество значений степенной функции у=хр при х>0, р≠0 – все положительные числа

Свойство 3: Степенная функция у=хр на интервале х>0 является возрастающей, если р>0, и убывающей, если р<0.

у=хр

р>1

х≥0

у=хр

р<0

х>0

у=ах

0<р<1

х≥0

# ***3.2. Решение иррациональных уравнений***

Определение: Иррациональным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком корня.

Правило: Для решения иррационального уравнения 2 степени необходимо возвести в квадрат обе части уравнения. В заключении необходимо выполнить проверку.

***3.3. Формулы сокращенного умножения***

квадрат суммы: ( а + в )² = а² + 2ав + в²

квадрат разности: ( а - в )² = а² - 2ав + в²

разность квадратов: а² - в² = ( а - в )( а + в)

куб суммы: ( а + в )³ = а³ + 3а² в + 3ав² + в³

куб разности: ( а - в )³ = а³ - 3а² в + 3ав² - в³

разность кубов: а³ - в³ = ( а – в)( а² + ав + в² )

сумма кубов: а³ + в³ = ( а + в)( а² - ав + в² )

***3.4. решение систем уравнений с двумя неизвестными***

Правило: Для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, необходимо из одного уравнения системы выразить одно неизвестное через другое, а затем подставить полученное выражение в другое уравнение системы. Ответ записывается в виде (х;у).

2. Примеры и упражнения

**Пример 1:** Решить иррациональное уравнение :

Решение:



5х+4=9

5х=9-4

5х=5

х=1

Проверка:



3=3

Ответ: х=1

**Пример 2:** Решить иррациональное уравнение



Решение:



х+4=3х-6

х-3х=-6-4

-2х=-10

х=5

Проверка:

а)

б)

3=3

Ответ: х=5

**Пример 4:** Решить иррациональное уравнение



Решение:



2х2-6х+12=х2+5х-6

2х2-6х+12-х2-5х+6=0

х2-11х+18=0

а=1, b=-11, с=18

х1,2= ==

х1= х2=

Проверка:

1. х1=9





1. х2=2





Ответ: х1=9, х2=2

**Пример 5:** Решить иррациональное уравнение: х-6 =

Решение:

(х-6)2 =()2

(х)2-2·х·6+62=2х+12

х2-12х+36=2х+12

х2-12х+36-2х-12=0

х2-14х+24=0

а=1, b=-14, с=24

х1,2= ==

х1=  х2= 

Проверка:1) х1=12

12-6=**6**

6

6=6

2) х2=2- не уд

2-6 =-4

4

-4≠4

Ответ: х=12

**Пример 3:** Решить иррациональное уравнение: 

Решение:



х2+4х-8=х2

х2+4х-8-х2=0

4х-8=0

4х=0+8

4х=8

х=2

Проверка:



х=2

2=2 Ответ: х=2

**Пример 8:** Решить систему уравнений:

х+у=5

х·у=6

Решение:

х+у=5 х·у=6

Выразим х через у и подставим во 2 уравнение:

х=5-у, (5-у)·у=6

5у-у2 –6=0

-у2+5у-6=0 : (-1)

у2-5у+6=0

а=1,b=-5, с=6

у1,2= -==

у1=  у2= 

у1=3 у2=2

х1=5-у=5-3=2 х2= 5-у =5-2=3

Ответ: (2;3), (3;2)

**Пример 9:** Решить систему уравнений х2-у2=200

х+у=20

Решение:

(х-у)·(х+у)=200

х+у=20 (разделим первое уравнение системы на второе уравнение)

 ,

получим: х-у=10

х=10+у, (подставим во второе уравнение системы)

(10+у)+у=20

2у=20-10

2у=10

у=5,

х=10+у=10+5=15 .Ответ: (15;5)

**Пример10** : Решить систему уравнений:

х+х·у+у=-1

х-х·у+у=3

Решение:

Сложим первое и второе уравнение системы:

(х+х·у+у)+( х+х·у+у)=-1+3

х+у+х+у=2

2х+2у=2

2(х+у)=2

х+у=1,

х=1-у

Подставим выражение для х в первое уравнение системы:

(1-у)+(1-у)·у+у=-1

1-у+у-у2+у=-1

-у2+у+1+1=0

-у2+у+2=0

у2-у-2=0

а=1,b=-1, с=-2

у1,2= ==

у1=  у2= 

у1=2 у2=-1

х1=1-у=1-2=-1 х2= 1-у =1-(-1)=2

Ответ: (-1;2), (2;-1)

**Варианты контрольной работы**

**Задание3. 1:** Решить иррациональное уравнение

**Вариант 1:** **1)  2) **

**Вариант 2:** 1) ** 2) **

**Вариант 3: 1) 2)**

**Вариант 4:** 1)** 2) **

**Вариант 5:**  **1) 2)**

**Вариант 6:**  1)** 2) **

**Вариант 7:** 1) ** 2) **

**Вариант 8:** 1) ** 2)**

**Вариант 9:** 1)** 2) **

**Вариант 10:** 1) ** 2) **

**Задание3. 2:** Решить систему уравнений

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1:** | х-у=3  х·у=10 | **Вариант 6:** | х-у=-2  х·у=3 |
| **Вариант 2:** | х-у=4  х·у=5 | **Вариант 7:** | х2-у2=9  х-у=1 |
| **Вариант 3:** | х2-у2=27  х+у=-3 | **Вариант 8:** | х-у=9  х·у=10 |
| **Вариант 4:** | х-у=-3  х·у=4 | **Вариант 9:** | х2-у2=207  х-у=9 |
| **Вариант 5:** | х-х·у+у=7  х+х·у+у=5 | **Вариант 10:** | х-у=7  х·у=-6 |

**4.Содержание темы «Тригонометрические функции»**

*Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат*

Определение угла в один радиан, формулы перевода градусной меры в радианную и наоборот. Понятие «единичная окружность», поворот точки вокруг начала координат.

*Определение тригонометрических функций*

Определения тригонометрических функций sinα, cosα, tgα,ctgα. Таблица значений тригонометрических функций

*Знаки тригонометрических функций* Значения sinα, cosα, tgα,ctgα в различных четвертях. Определение знака числа sinα, cosα и tg α при заданном значении α

*Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента*

Основное тригонометрическое тождество, зависимость между тангенсом и котангенсом, зависимость между тангенсом и косинусом, зависимость между котангенсом и синусом

*Четность и нечетность тригонометрических функций. Периодичность тригонометрических функций* Область определения и область значений, тождества четности и периодичности для синуса и косинуса, свойства четности функций y=tgx и y=ctgx и периодичности

*Формулы сложения, приведения*

Формулы сложения. Значения тригонометрических функций углов, больших 90°, сводятся к значениям для острых углов; правила записи формул приведения

*Тригонометрические функции двойного, половинного аргумента*

Формулы двойного угла, Формулы половин-ного угла синуса, косинуса и тангенса;Формулы, выражающие sinα, cosα и tg α через tg (α/2)

*Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение*

Формулы суммы и разности.Формулы сложения.Формулы двойного угла

*Функция у = sinх, её свойства и график* Определения синусоиды и линии синусов, построение графиков указанных функций и выполнение с ними простейших преобразований.

*Функция у = cosх, её свойства и график*

Определения косинусоиды и линии косинусов, построение графиков указанных функций и выполнение с ними простейших преобразований. *Функции у = tgх, у = ctgх, их свойства и графики* Определения тангенсоиды, построение графиков указанных функций и выполнение с ними простейших преобразований.

# Основные сведения из теории

***4.1Определение тригонометрических функций***

Определение 1: **Синусом** числа α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан. (sinα)

Определение 2: **Косинусом** числа α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан.(cosα)

т.М(cosα,sinα)

Определение 3: **Тангенсом** числа α называется отношение синуса числа α к его косинусу.(tgα) , tgα=

Определение 4: **Котангенсом** числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу.(ctgα), ctgα=

Определение: Функции у=sinα, у=cosα, у=tgα, у=сtgα называют тригонометрическими функциями.

Определение: Единичной (тригонометрической) окружностью называется окружность с центром в начале координат, радиуса 1.

По

часовой «-»

стрелке

Против

часовой «+»

стрелки

90º()

0º(0)

II четверть

I четверть

360º(2π)

180º(π)

III четверть

270º()

IV четверть

***4.2. Таблица значений тригонометрических функций***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0º | 30º | 45º | 60º | 90º | 120º | 150º | 180º | 270º | 360º |
| α | 0 |  |  |  |  |  |  | π |  | 2π |
| sinα | 0 |  |  |  | 1 |  |  | 0 | -1 | 0 |
| cosα | 1 |  |  |  | 0 | - | - | -1 | 0 | 1 |
| tgα | 0 |  | 1 |  | не сущ. | - | - | 0 | не сущ. | 0 |
| ctgα | не сущ. |  | 1 |  | 0 | - | - | не сущ. |  | не сущ. |

***4.3. Знаки тригонометрических функций***

ctgα

sinα

cosα

tgα

***4.3. Таблица приведения***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | -α | +α | π - α | π + α | -α | +α | 2π - α | 2π + α |
| sinα | cosα | cosα | sinα | - sinα | - cosα | - cosα | - sinα | sinα |
| cosα | sinα | - sinα | - cosα | - cosα | - sinα | sinα | cosα | cosα |
| tgα | ctgα | - ctgα | - tgα | tgα | ctgα | - ctgα | - tgα | tgα |
| ctgα | tgα | - tgα | - ctgα | ctgα | tgα | - tgα | - ctgα | ctgα |

***4.4. Основные формулы тригонометрии***

1. sin2α+cos2α=1 (основное тригонометрическое тождество)

а)  ,б) 

1. tgα= 3) ctgα=

4) tgα∙ctgα=1 а)  , б) 

5)  , б) 

6)  , б) 

***4.5 Чётность и нечётность тригонометрических функций***

cos(-α)=cosα sin(-α)=-sinα

tg(-α)=-tgα ctg(-α)=-ctgα

Определение: Функция f(х) называется чётной, если для каждого х из области определения этой функции выполняется равенство: f(-х)=f(х)

Свойство: График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение: Функция f(х) называется нечётной, если для каждого х из области определения этой функции выполняется равенство: f(-х)=-f(х)

Свойство: График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

## ***4.6 Периодичность тригонометрических функций***

Определение: Функция f(х) называется периодической, если существует такое число Т≠0, что для любого х из области определения этой функции выполняется равенство:

f(х-Т)=f(х)=f(х+Т)

Число Т называют периодом функции f(х).

### **4.7 Формулы сложения**

cos(α + β) = cosα∙cosβ - sinα∙sinβ , cos(α - β) = cosα∙cosβ + sinα∙sinβ

sin(α + β) = sinα∙cosβ + cosα∙sinβ , sin(α - β) = sinα∙cosβ - cosα∙sinβ

tg(α + β) =

***4.8 Тригонометрические функции двойного аргумента***

sin2α = 2∙sinα∙cosα , cos2α = cos²α - sin²α . tgα=

***4.9 Тригонометрические функции половинного аргумента***

, 

***4.10 Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение***

sinα + sinβ = 2∙sin  ∙ cos , sinα - sinβ = 2∙sin ∙ cos 

cosα + cosβ = 2∙cos  ∙ cos  , cosα - cosβ = - 2∙sin  ∙ sin 

***4.11 Функция у=sinх***

Основные свойства:

1. Область определения – множество R всех действительных чисел;
2. Множество значений – отрезок[-1;1];
3. Функция у=sinх – периодическая с периодом 2π, т.е. sin(х+2π)=sinх
4. Функция у=sinх - нечётная, т.е.sin(-х)=-sinх
5. Функция у=sinх:

возрастает на отрезках

убывает на отрезках 

1. Функция у=sinх принимает

Наибольшее значение, равное 1, при х=

Наименьшее значение, равное –1, при х=-

Значение равное нулю, при х=



***4.12 Функция у=cosх***

Основные свойства:

1) Область определения – множество R всех действительных чисел;

2) Множество значений – отрезок[-1;1];

3) Функция у=cosх – периодическая с периодом 2π, т.е. cos(х+2π)=cosх

4) Функция у=cosх чётная, т.е.cos(-х)=cosх

5) Функция у=cosх:

возрастает на отрезках

убывает на отрезках 

6) Функция у=cosх принимает

Наибольшее значение, равное 1, при х=

Наименьшее значение, равное –1, при х=

Значение равное нулю, при х=

Примеры и упражнения

**Пример 1:** Найти значение выражения:

1. 3sin+2cos-tg=3∙+2∙-=-=

=+-=

1. 3cos180º+5ctg270º-2sin360º=3∙(-1)+5∙0-2∙1=

= -3+0-2=-5

1. 2sin(-30º)=-2sin30º=-2∙=-1
2. 4cos(-)∙sin(-)+tg(-)=4∙∙)+(-1)=

=-∙-1=-3-1=4

1. Sin73º∙cos17º + cos73º∙sin17º= sin(73º +17º)=

=sin90º=1

1. cos∙cos - sin∙sin=

cos( +)=cos=cos2π=1

1. 2∙sin15º∙cos15º= Sin2∙15º= Sin30º=
2. cos²75º - sin²75º= Cos2∙75º= Cos150º=-
3. Cos105º+cos75º=2∙cos  ∙ cos =

= 2∙cos 15º ∙ cos 90º= 2∙cos 15º ∙ 0=0

1. Sin300º + sin60º=2∙sin  ∙ cos = 2∙sin 180º ∙ cos120º=2∙0∙ cos120º=0

**Пример 2:** Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=, 

Решение:

Определим знак:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| интервал | четверть | Знак  sinα | Знак  cosα | Знак  tgα | Знак  ctgα |
|  | IIч. | + | - | - | - |

Формула 1б) 

Формула 2) Формула 3)

tgα= ctgα=

Ответ: cosα=,tgα=-,ctgα=

**Пример 3:** Вычислить sinα,cosα,tgα, , если ctgα=-3,



Решение:

Определим знак:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| интервал | четверть | Знак  sinα | Знак  cosα | Знак  tgα | Знак  ctgα |
|  | IVч. | - | + | - | - |

Формула 4а)



Формула 5а)



Формула 6а)



Ответ: sinα=-, cosα=,tgα=-

**Пример 4**: Упростить

1. (1-sinα)∙(1+sinα)=1+sinα-sinα-sin2α=1-sin2α=sin2α+cos2α-sin2α=cos2α
2. =1+tg2α-1=tg2α
3. 
4. Sin(-α)∙cos(-α)∙tg(-α)=-sinα∙cosα∙(-tgα)=sinα∙cosα∙tgα==sinα∙cosα∙=sinα∙sinα=sin2α
5. (1-sin(-α))∙(1-sinα)=(1+sinα)∙(1-sinα)=1+sinα-sinα-sin2α==1-sin2α==sin2α+cos2α-sin2α=cos2α
6. Sin(π – α)∙cos(-α)-cos(π – α)∙sin(-α)=sinα∙sinα-(-cosα)∙cosα== sin2α+cos2α=1

7)

**Варианты контрольной работы**

**Задание 4.1:** Найти значение выражения

**Вариант 1:**

1. 12cos2π -16sinπ+13cos0-14sin 2) sin155º-sin25º

**Вариант 2:**

1. 9sinπ+10cos2π-11sin+12cos0 2) 2sin75º∙cos75º

**Вариант 3:**

1. 3sin2120º-4cos180º+3tg135º 2) sin20º∙cos10º+ cos20º∙ sin10º

**Вариант 4:**

1. 2cos2150º-3sin90º-5ctg135º 2) cos100º+cos80º

**Вариант 5:**

1. ** 2)** cos2135º-sin2135º

**Вариант 6:**

1. ** 2)** cos20º∙cos40º- sin20º∙ sin40º

**Вариант 7:**

1. ** 2)** 2

**Вариант 8:**

1. ** 2)** 

**Вариант 9:**

1. cos60º+2sin30º+tg260º-ctg45º 2) cos100º+cos80º

**Вариант 10:**

1. 3cos2180º+5ctg270º-2sin360º-tg60º 2)sin155º-sin25º

**Задание 4.2:** Найти остальные тригонометрические функции

**Вариант 1:**

1. sinα=-0,6  2) tgα=6 

**Вариант 2:**

1. cosα=-  2) сtgα=9 

**Вариант 3:**

1. sinα=, 0<α< 2) tgα=4, <α<π

**Вариант 4:**

1. cosα=-,π<α< 2) ctgα=5, <α<π

**Вариант 5:**

1. sinα=-0,8,  2) tgα=5 

**Вариант 6:**

1.  2) 

**Вариант 7:**

1.  2) 

**Вариант 8:**

1. sinα=-0,8 , <α<π 2) tgα=8, 0<α< 

**Вариант 9:**

1. cosα=-,π<α< 2) ctgα=2, <α<π

**Вариант 10:**

1. sinα=-,  2)ctgα=-3, 

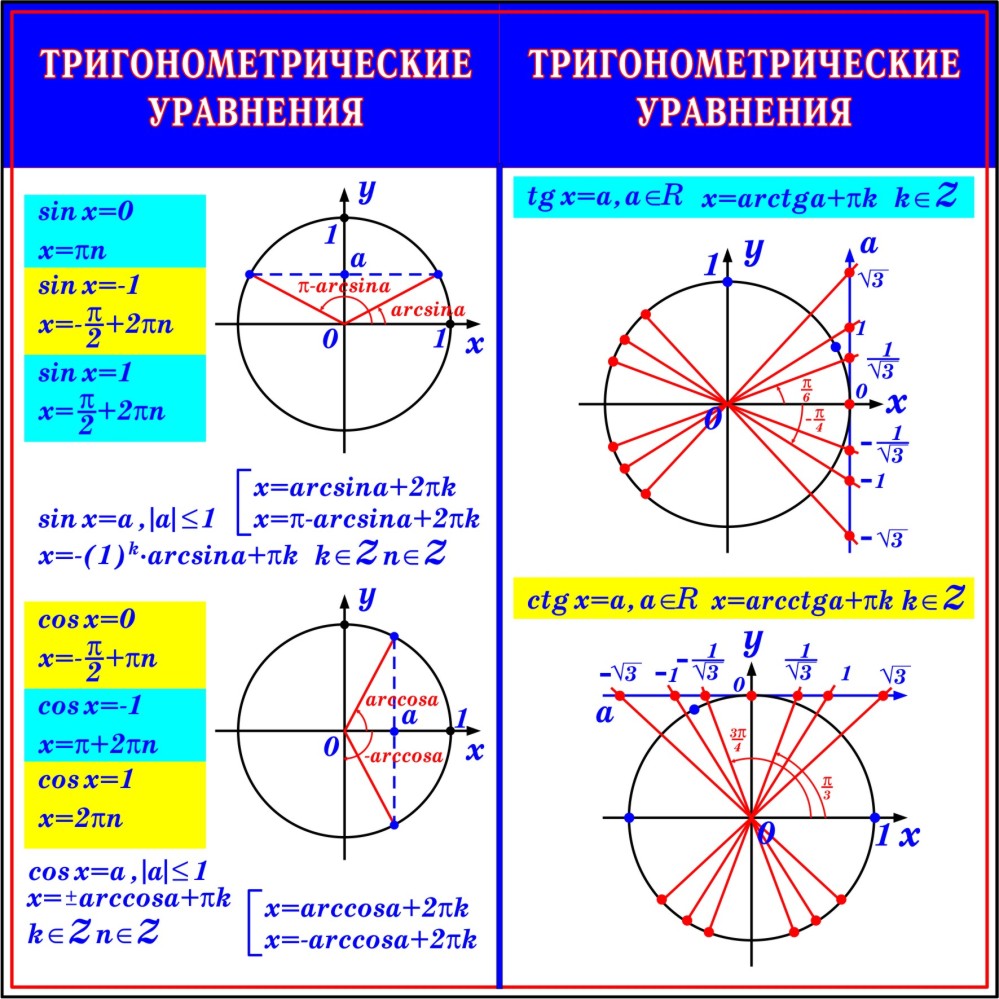
**Задание 3:** Упростить выражение

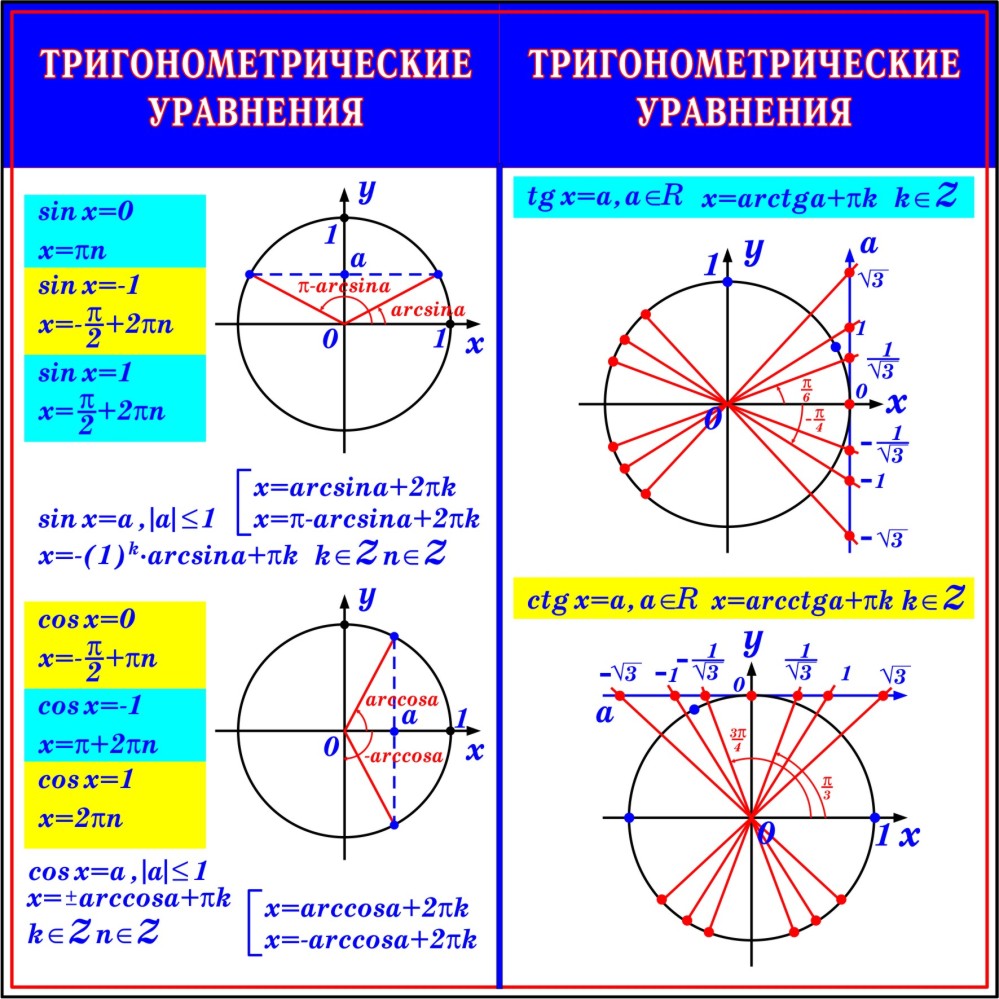
**Вариант 1:**  **Вариант 2:** 

**Вариант 3:**  **Вариант 4:** 

**Вариант 5:**  **Вариант 6:** sin2α-tgα∙ctgα+ cos2α

**Вариант 7:** (tgα∙ctgα+ ctg2α)∙cosα **Вариант 8:** 

****Вариант 9:** (tgα∙ctgα+ tg2α)∙sinα **Вариант 10:** 

****5.Содержание темы «Тригонометрические уравнения»**

*Арксинус числа*

Определение арксинуса

*Уравнение sinх = а*

Формулы корней, особую форму записи решений для частных случаев

*Арккосинус числа*

Определение арккосинуса

*Уравнение cosх = а*

Формулы корней, особую форму записи решений для частных случаев

*Арктангенс числа, арккотангенс числа. Уравнения tgх = а, ctgх = а*

Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса. Формулы корней, особую форму записи решений для частных случаев

*Решение тригонометрических уравнений, приводимых к квадратному*

Основные тригонометрические формулы, формулы для решения

простейших тригонометрических уравнений

*Решение тригонометрических уравнений методом группировки и разложения на множители*

Способы решения уравнений методом группировки и разложением на множители.

*Решение однородных тригонометрических уравнений и уравнений, приводимых к ним*

Основные формулы для решения уравнений

*Решение тригонометрических уравнений, решаемые с помощью формул сложения, понижения степени и других*

Основные формулы для решения уравнений

*Решение простейших тригонометрических неравенств*

Определение простейших тригонометрических неравенств, различные способы их решения

# Основные сведения из теории

***5.1Арксинус числа***

Определение: Арксинусом числа а℮[-1;1] называется такое число α℮[-;], синус которого равен а.

Обозначение: arcsina , -≤ arcsina ≤, Определение: arcsina = α ↔ sinα = а

Свойства: 1) sin(arcsina)=а , 2) arcsin(sinα)=α 3) arcsin(-a)=- arcsina

Таблица значений arcsina

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а | 0 |  | () |  | 1 |
| arcsina | 0 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| а | - | -(-) | - | -1 |
| arcsina | - | - | - | - |

***5.2. Арккосинус числа***

Определение: Арккосинусом числа а[-1;1] называется такое число α[0;π], косинус которого равен а.

Обозначение: arccosa , 0≤ arccosa ≤ π, Определение: arccosa = α ↔ cosα = а

Свойства: 1) cos(arccosa)=а 2) arccos(cosα)=α 3) arccos(-a)=π- arccosa

Таблица значений arccosa

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а | 0 |  | () |  | 1 |
| arccosa |  |  |  |  | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| а | - | -(-) | - | -1 |
| arccosa |  |  |  | π |

***5.3. Арктангенс числа***

Определение: Арктангенсом числа а℮[-;] называется такое число α, тангенс которого равен а.

Обозначение: arctga , -≤ arccosa ≤ , Определение: arctga = α ↔ tgα = а

Свойства: 1) tg(arctga)=а 2) arctg(tgα)=α 3) arctg(-a)=- arctga

Таблица значений arctga

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| а | 0 |  | 1 |  |
| arctga | 0 |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а | - | -1 | - |
| arctga |  |  |  |

***5.4. Уравнение sinx=a***

***5.5. Уравнение cosx=a***

sinx=a cosx=a

x=(-1)narcsina+ πn,nZ

x=±arccosa+ 2πn,nZ

***5.6. Уравнение tgx=a*** tgx=a , ctgx=a

x=arctgx+ πn,nZ, x=arcctgx+ πn,nZ,

2. Примеры и упражнения

**Пример:** Найти значение выражения:

1. аrcsin1-arcsin(-1)+ arcsin()+arcsin(-) =

=-(-)++(-)=++-= (3+(3+(1-(2= =

1. tg(2 arcsin )=tg(2∙)=tg=
2. cos(аrcsin(tg))= cos(аrcsin1)= cos=0
3. аrcsin(cos(аrcsin(tg()))=аrcsin(cos(аrcsin(∙1))= аrcsin(cos(аrcsin))= аrcsin(cos)= аrcsin=
4. 2аrccos0+3arccos1=2∙+3∙0=+0=π
5. 12аrccos-3arccos(-)=12∙-3∙=2π-2π=0
6. аrccos (-)+3аrcsin(-1)=+3∙(-)=-
7. sin(6аrccos)= sin(6∙)= sinπ=0

**Пример 2**: Решить тригонометрическое уравнение:

**(1-2sinх)(1-3cosх)=0**

Решение:

1-2sinх=0 или 1-3cosх=0

-2sinх=-1 - 3cosх=-1

sinх= cos=-

х1=(-1)narcsin+πn,n℮Z х2=±arccos(-)+πn,n℮Z

х1=(-1)n∙+πn,n℮Z х2=-arccos+πn,n℮Z

Ответ: х1=(-1)n∙+πn,n℮Z х2=-arccos+πn,n℮Z

**Пример 3**: Решить тригонометрическое уравнение:

****.

Решение:

.

.Разделим левую и правую части уравнения на : .

Ответ: 

**Пример 4**: Решить тригонометрическое уравнение:

**2sin2х+sinх-6=0**

Решение:

Пусть sinх=t, t℮[-1;1]

2t²+t – 6 = 0

Решение:

а=2, b=1, с=-6

t1,2= =

t1= t2=

t1 = [-1;1],т.е. не уд. t2 = -2[-1;1],т.е. не уд.

Ответ: решений нет

**Пример 5**: Решить тригонометрическое уравнение:

**2sin2х+5cosх-5=0**

Решение:

2(1-cos2х)+5cosх-5=0

2-2cos2х+5cosх-5=0

-2cos2х+5cosх-3=0 :(-1)

2cos2х-5cosх+3=0

Пусть cosх=t, t℮[-1;1]

2t²-5t +3 = 0

а=2, b=-5, с=3

t1,2= =

t1= t2=

t1= t2=1

cosх= [-1;1],т.е. не уд. cosх=1(частный случай)

х=2πn,n℮Z

Ответ: х=2πn,n℮Z

**Пример 6**: Решить тригонометрическое уравнение:

**4sin2x-5sinx∙cosx-6cos2x=0**

Решение:

4sin2x-5sinx∙cosx-6cos2x=0(разделим на то, что стоит перед знаком «=», т.е. на cos2х)

=0

4tg2x-5tgx-6=0

Пусть tgx=t

4t2-5t-6=0

а=4, b=-5, с=-6

t1,2= =

t1= t2=

t1=2 t2=-

tgx=2 tgх=-

х1= arctg2+πn,n℮Z х2= arctg(-)+πn,n℮ Z,

Ответ: х1= arctg2+πn,n℮Z, х2=-arctg+πn,n℮Z

**Варианты контрольной работы**

**Задание 5.1:** Найти значение выражения

**Вариант 1:**



**Вариант 2:**



**Вариант 3:**

arcsin+4 arcsin- arccos+ аrctg 

**Вариант 4:**

arcsin(сos(аrctg ))

**Вариант 5:**

аrctg +аrccos 

**Вариант 6:**



**Вариант 7:**



**Вариант 8:**

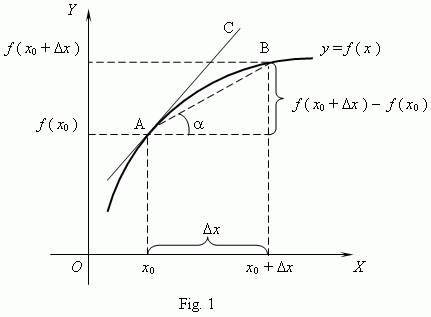


**Вариант 9:** 

**Вариант 10:** 

**Задание 2:** Решить тригонометрическое уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1: 1)**  sinx=  2)3cos²x – 5cosx +2 =0 | **Вариант 2:** 1)sinx=  2)4sin²x -11sinx +8 =0 |
| **Вариант 3:**   1. (2sinx+1)(2sinx-)=0   2)8cos²x -12sinx +7 =0 | **Вариант 4:**   1. (sin7x+1)(4sinx-2)=0   2)2sin²x +5cosx -5 =0 |
| **Вариант 5:**   1. Sin5x=- 2. 4cos²x – 4cosx -3 =0 | **Вариант 6:**   1. Sin10x=- 2. 4cos²x -13sinx +1 =0 |
| **Вариант 7:**  1) tg4x=0  2) (2sinx-)(2sinx+1)=0 | **Вариант 8:**   1. (sinx+1)(2sinx-1)=0 2. 4sin²x +4sinx -3 =0 |
| **Вариант 9:**   1. Cosx= 2. 2sin2x+sinx-1=0 | **Вариант 10:**   1. Cos3x= 2. 3sin2x-5sinx-2=0 |

****

**6.Содержание темы «Вычисление производной функции»**

*Производная степенной функции. Таблица производных.*

Определение производной, формулы производных элементарных функций, простейшие правила вычисления производных,

Формулы производной степенной функции

*Правила дифференцирования: суммы и функции с постоянным множителем.*

Правила нахождения производных суммы, произведения и частного, производная сложной функции

*Производные некоторых элементарных функций.*

Определение элементарных функций, формулы производных показательной, логарифмической, тригонометрических функций

*Производные сложных функций.*

Понятие сложной функции, формулу производной сложной функции, условие дифференцируемости функции

*Правила дифференцирования: произведения и частного.*

Основные правила дифференцирования

*Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.*

Угловой коэф. прямой, угол между прямой и осью Ох; геом. смысл производной, уравнение касательной к графику функции; способ построения касательной к параболе.

# Основные сведения из теории

# ***6.1. Определение производной***

Пусть х - произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности точки Х0 (окрестность точки Х0 - это интервал (а; б), x0∈(а; 6)).

Разность х-Х° называется приращением аргумента:

∆x = х-x0. От­сюда x = x0 + ∆x.

Разность f(x)-f(x0) называется приращением функции:

∆f = f(x) - f(x0) или

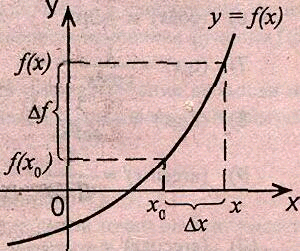
∆ f = f(x0+∆x) – f(x0).

Отсюда f (x0+∆x) = f (x0) + ∆ f.

Геометрический смысл приращений ∆х и ∆ f показан на рисунке Производной функции y = f(x) в точке x0 называется предел отноше­ния приращения функции ∆f к приращению аргумента ∆x, стремящего­ся к "нулю."

f ' (x0) = lim (∆ f / ∆x)

∆x→ 0



Определение: Производной функции f(х) в точке х называется предел разностного отношения  при h→0^

f ′(x)=

Обозначение: Если **f(х)-**функция, то **f ′(x)** – её производная

Определение: Операция вычисления производной называется дифференцированием.

Определение: Если функция f(х) имеет производную в точке х, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке.

## ***6.2. Правила дифференцирования***

1. (f(x)+g(x))′=f(x)′+g(x)′
2. (f(x)-g(x))′=f(x)′-g(x)′
3. (c·f(x))′=c·f′(x)

***6.3. Формулы вычисления производных***

1.(с)'=0, где с – число 2. (хр)′=р·хр-1

3(х)'=1 4 (ех)′=ех

5(lnx)′=, х>0 6.(sinx)′=cosx

7. (cosx)′=-sinx 8. (ах)′=ахlnx

9(logax)′=

***6.4. Производная сложной функции***

Если f (g(х)) - сложная функция, то ее производная равна произ­ведению производных внешней и внутренней функций, т.е. [f(g(x))]'= f '(g) ◦ g'(x).

1. (up)'=p∙up-1∙u' 2. (eu)'=eu∙u' 3. (sinu)'=cosu∙u' 4. (cosu)'=-sinu∙u' 5. (lnu)'= ∙u'

***6.5. Производная произведения и частного***

1. Если функции u и v дифференцируемы в точке x0, то их произве­дение также дифференцируемо в точке x0 причем

(u∙v)'= u'∙v+ u∙ v'

1. Если функции υ и ν дифференцируемы в точке х0 и

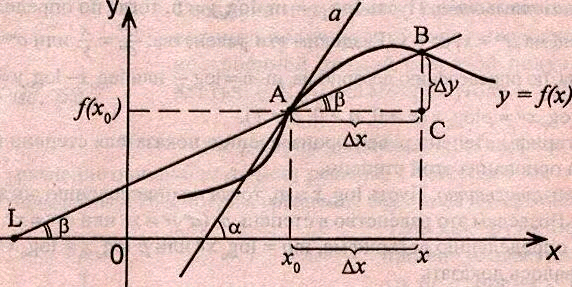
ν'(x0) ≠ 0, то их частное также дифференцируемо в точке x0, причем



3) Если функция и дифференцируема в точке x0 и с = const. то их произведение также дифференцируемо в точке x0 причем (сu)' = с∙u'.

***6.6.Геометрический смысл производной***

Рассмотрим график функции у = f (х), дифференцируемой в окрест­ностях точки x0 .



Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку гра­фика функции - точку А(x0, f (х0)) и пересекающую график в некоторой точке 'B(x;f(x)).

Геометрический смысл производной заключается в следую­щем:

Производная функции в точке x0 равна угловому коэффициенту ка­сательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x0.

Примеры и упражнения

**Пример 1 :** Найти производную функции:

1. (2х5)′=2∙5х5-1=10х4
2. (4х12)′=4∙12х12-1=48х11
3. (3х4+2х15)′=(3х4)′+(2х15)′=3∙4х3+2∙15х14=12х3+30х14
4. (3х2+4х-46)′= (3х2)′+(4х)′-(46)′=3∙2х+4∙1-0=6х+4
5. (6cosx –2sinx+5ex)′= (6cosx)′ –(2sinx)′+(5ex)′=6∙(-sinx)-2∙cosx +5∙ex= =6sinx-2cosx+5ex
6. (23lnx-12x4)′= (23lnx)′-(12x4)′=23∙-12∙4х3=-48х3
7. ((3х+15)7)'=7∙(3х+15)7-1∙(3х+15)'=7∙(3х+15)6∙(3)=21(3х+15)6
8. ((5х-7)∙(4+3x))'= (5х-7)'∙(4+3х)+ (5х-7) ∙ (4+3х)'=

5∙ (4+3х)+(5х-7)∙4=20+15х+20х-28=35х-8

6

1. .(sin()'=cos(∙()'= cos(∙= cos(

**Пример 2:** Вычислить значение производной в точке

а)Найти; ,если 

Решение:

f'(x)= ((2х+3)5)'=5∙(2х+3)5-1∙(2х+3)'=5∙(2х+3)4∙(2)=10(2х+3)4

f'(-2)= 10(2∙(-2)+3)4=10(-1)4=10

Ответ: f'(-2)=10

b) Найти; ,еслиf(x) =

Решение:

f'(x)= (****)'=****∙()'=****∙()'=****∙()=****

**=****=**e

Ответ: **=**e

**Пример 3:** Найти угловой коэффициент касательной к графику функции у=f(х) в точке х0.

f(х) = 5х3-6х2+8х-10 , х0=1

Решение:

к= f'(x0)- угловой коэффициент касательной

f'(x)= (5х3-6х2+8х-10)'=15х2-12х+8

к= f'(x0)= f'(1)=15∙12-12∙1+8=11

Ответ: к=11

**Пример 4:** Написать уравнение касательной к графику функции у=f(х) в точке х0

у=  , х=1

Решение :

у= f(x0)+ f'(x0)∙(х-х0) – уравнение касательной

f(x0)= f(1)= 

f'(x)=( 

f'(x0)= f'(1)= 

у= f(x0)+ f'(x0)∙(х-х0)=3+(х-1)=3+х-=х-- уравнение касательной

Ответ: у=х-- уравнение касательной

**Варианты контрольной работы**

**Задание 6.1:** Найти производную

**Вариант 1:**  , , , 

**Вариант 2:**  , (15ех-4lnx)' , , 

**Вариант 3:**  , , 

**Вариант 4:** , , , 

**Вариант 5:** ( 3x)', , (sinx-5cosx)', ()'

**Вариант 6:** ( 6x)', (20 sin x - 7 cos x + 1)' ,( ln(x)' , ()'

**Вариант 7:** , (sin (3x+2))',  , 

**Вариант 8:** , 

**Вариант 9:** , ,

**Вариант 10:** ,  , ,

**Задание 6. 2:** Вычислить значение функции

**Вариант 1**: Найти значение производной функции  в точке .

**Вариант 2**: Найти значение производной функции  в точке .

**Вариант 3**: Найти значение производной функции  в точке .

**Вариант 4**: Найти значение производной функции  в точке .

**Вариант 5**: Найти значение производной функции  в точке .

**Вариант 6**: Найти значение производной функции у=  в точке .

**Вариант 7**: Найти значение производной функции у= в точке .

**Вариант 8**: Найти значение производной функции  в точке .

**Вариант 9**: Найти значение производной функции y(x)=5x7-8x в точке x0=1

**Вариант 10:** Найти значение производной функции y(x)=x2-3x в точке x0=-78

функции  в точке .

**Задание 6. 3** Найдите угловой коэффициент касательной

**Вариант 1**: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  в точке с абсциссой .

**Вариант 2**: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  в точке с абсциссой .

**Вариант 3**: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе  в точке с абсциссой .

**Вариант 4**: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  в точке .

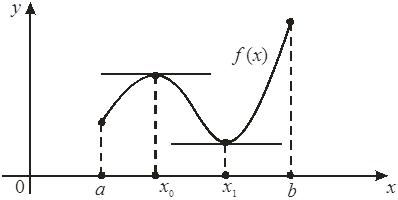
**Вариант 5**: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  в точке .

**Вариант 6**: Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  в точке .

**Вариант 7**: Найдите значение производной функции  в точке .

**Вариант 8**: Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  в точке .

**Вариант 9**: Написать уравнение касательной к графику функции в точке х0 

**Вариант 10**: Напишите уравнения касательной к графику функции , в точке х0 =5.

**7. Содержание темы «Применение производной функции»**

*Нахождение стационарных точек и промежутков монотоннос­ти.*

Достаточный признак убывания (возрастания) функции, теорема Лагранжа, понятия «промежутки монотонности функции»

*Экстремумы функции и значения в них*

Определения точек максимума и минимума, необходимый признак экстремума (теорему Ферма) и достаточный признак максимума и минимума, знать определения стационарных и критических точек функции

*Исследование и построение графиков функций.*

Схема исследования функции, метод построения графика чётной (нечётной) функции

*Нахождение наибольших и наименьших значений функций.*

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и на интервале

# Основные сведения из теории

# ***7.1.Экстремумы функции***

Определение: Точка х0 называется точкой максимума **т.max** функции f(х) если для всех х из некоторой окрестности точки х0 выполняется неравенство f(х) ≤ f(х0)

Другими словами: **т.max** – точка, выше которой график не поднимается

(в примере: х=4 –т.max)

Определение: Точка х0 называется точкой минимума **т.min** функции f(х) если для всех х из некоторой окрестности точки х0 выполняется неравенство f(х) ≥ f(х0)

Другими словами: **т.min** – точка, ниже которой график не опускается

(в примере: х=-1 –т.min)

Определение: Точки минимума **т.min** и точки максимума **т.max** называются точками экстремума функции.

Теорема Ферма: Пусть функция f(х) определена в некоторой окрестности точки х0 и дифференцируема в этой точке. Если х0 – точка экстремума функции f(х), то f′(х0)=0.

Другими словами: Необходимое условие существования точек экстремума: f′(х0)=0

**т.max**

**т.min**

Алгоритм нахождения точек экстремума функции **(**т.max, т.min**)** :

1) Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1. Найти производную функции f′(х);
2. Найти стационарные точки (точки, в которых производная f(х) равна нулю), т.е. решить уравнение f′(х)=0;
3. Отметить эти точки на числовой оси, указать промежутки;
4. Выявить знаки производной f′(х) на каждом из полученных промежутков (подставить любое число из проверяемого промежутка в производную и узнать знак);
5. Записать ответ.

2) По схеме определить точки максимума и точки минимума.

***7.2.Исследование функции с помощью производной***

# Алгоритм исследования функции для построения графика

1. Найти область применения функции;
2. Найти производную функции f′(х);
3. Найти стационарные точки;
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Определить точки экстремума (т.max, т.min);
6. Найти значение функции в стационарных точках;
7. Заполнить таблицу;
8. Построить график.

# ***7.3 Наибольшее и наименьшее значение функции***

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [а;в]

1. Найти значение функции на концах отрезка, т.е. f(а), f(в);
2. Найти производную функции f′(х);
3. Найти стационарные точки (f′(х) =0)
4. Проверить входят ли стационарные точки в отрезок [а;в];
5. Найти значение функции в стационарных точках;
6. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

2. Примеры и упражнения

**Пример 1:** Найти точки экстремума функции:

f(х) = х3+6х2+4

Решение:

1. f′(х) = (х3+6х2+4) = (х3)′+(6х2)′+(4)′= 3х2+6∙2х+0=3х2+12х
2. f′(х)=0 3х2+12х=0

х(3х+12)=0

х=0 или 3х+12=0 , 3х=-12 , х= ,х=-4

т.min

т.max

∞

-∞

3) f′(х) + - +

0

-4

f(х)

4) На интервале (-∞;-4) возьмём число -5, подставим в производную f′(х):

f′(-1)=3∙(-5)2+12∙(-5)=75-60=15>0, знак «+», значит (↑)

На интервале (-4;0) возьмём число -1, подставим в производную f′(х):

f′(-1)=3∙(-1)2+12∙(-1)=3-12=-9<0, знак «-», значит (↓)

На интервале (0;∞) возьмём число 1, подставим в производную f′(х):

f′(1)=3∙12+12∙1=3+12=15>0, знак «+», значит (↑)

5) На схеме определяем, что х=-4 т.max, х=0 – т.min

Ответ: х=-4 т.max, х=0 – т.min

**Пример 2:** Исследовать функцию и построить график

f(х) = 6х2-2х3

Решение:

1. Область применения: любое х;
2. f′(х) = (6х2)′-(2х3)′=6∙2х-2∙3х2=12х-6х2
3. f′(х) =0 12х-6х2=0

х(12-6х)=0

х=0 или 12-6х=0

-6х=-12

х=, х=2

т.min

т.max

4)

f′(х) - + -

∞

-∞

0

2

f(х)

(-∞;0) «-1» f′(-1)=12∙(-1) -6∙(-1)2=-12-6=-18<0, знак «-», значит (↓)

(0;2) «1» f′(1)=12∙1-6∙12=12-6=6>0, знак «+», значит (↑)

(2;∞) «3» f′(3)=12∙3-6∙32=36-54=-18<0, знак «-», значит (↓)

5) Определим по схеме, что х=0 – т.min, х=2 – т.max

6) f(0) = 6∙02-2∙03=0-0=0

f(2) = 6∙22-2∙23=24-16=8

7) Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | (-∞;0) | 0 | (0;2) | 2 | (2;∞) |
| f′(х) | - | 0 | + | 0 | - |
| f(х) |  | 0 |  | 8 |  |

т.min(0;0) т.max(2;8)

8) Строим график функции f(х) = 6х2-2х3



**Пример 3:**  Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(х)=2х3-3х2+2 на отрезке [-2;3]

Решение:

1) **f(-2)**=2∙(-2)3-3∙(-2)2+2=-16-12+2=-**26**

**f(3)**=2∙33-3∙32+2=54-27+2=**29**

2) f′(х) =(2х3-3х2+2)′= (2х3)′-(3х2)′+(2)′=2∙3х2-3∙2х+0=6х2-6х

3) f′(х) =0 6х2-6х =0

х(6х -6)=0

х=0 или 6х-6=0

6х=6 , х==1 Получили стационарные точки х1=0, х2=1,

по заданию имеем отрезок [-2;3], х1 и х2 входят в заданный отрезок, значит обе стационарные точки нам подходят.

5) **f(0)**=2∙03-3∙02+2=0-0+2=**2**

**f(1)**=2∙13-3∙12+2=2-3+2=**1**

6) Имеем:

**f(-2)**= -**26**  **f(3)**= **29 f(0)**=**2**  **f(1)**= **1**

Выбираем самое большое и самое маленькое значение:

Наибольшее значение: f(3)= 29 **,** наименьшее значение:f(-2)= -26

Ответ: наибольшее значение: f(3)= 29 **,** наименьшее значение:f(-2)= -26

**7 Варианты контрольной работы**

**Задание 7.1:** Найти точки экстремума функции

**Вариант 1:**

*а) f(х)=-х4+4х2-3 б) f(х)=(6х-7)∙(2х+8)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1:**  *а) f(х)=-х4+4х2-3 б) f(х)=(6х-7)∙(2х+8)* | **Вариант 2:**  *а) f(х)=х3-6х2+9х+3 б) f(х)=(4х+5)∙(х-7)* |
| **Вариант 3:**  *а) f(х)=-х3-3х2+24х-4 б) f(х)=(2х+1)∙(3х+6)* | **Вариант 4:**  *а) f(х)=х3-3х2-9х+3 б) f(х)=( х-2)∙(9х+1)* |
| **Вариант 5:**  *а) f(х)=-х3+6х2+15х+1 б) f(х)=(8х+2)∙(4х-13)* | **Вариант 6:**  *а) f(х)=-х3+х2+8х б) f(х)=( х+12)∙(12х-1)* |
| **Вариант 7:**  *а) f(х)=2х3+9х2-24х б) f(х)=(8х-3)∙(2х-7)* | **Вариант 8:**  *а) f(х)=2х3-3х2-1 б) f(х)=(13х-6)∙(9х+1)* |
| **Вариант 9:**  *а) f(х)=2х3-3х2-36х б) f(х)=(4х+3)∙(9х-5)* | **Вариант 10:**  *а) f(х)=х3+х2-2 б) f(х)=(2х-5)∙(3х-4)* |

**Задание 3.7:** Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

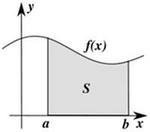
**Вариант 1:**  ,  **Вариант 2:** , 

**Вариант 3:** ,  **Вариант 4:** , 

**Вариант 5:** ,  **Вариант 6:** , 

**Вариант 7:**  **Вариант 8;** *f(х)=2х3+3х2-12х-1 [-1;3]*

**Вариант 9:** *f(х)=4х2-16х+17 [0;3]* **Вариант 10:** *f(х)=5х2-20х+3 [0;3]*

**

1. **Содержание темы «Первообразная функции и интеграл»**

*Понятие первообразной функции.*

Определение первообразной, основное свойство первообразной

*Правила нахождения первообразных.. Таблица первообразных.*

Таблица первообразных, правила интегрирования. Нахождение первообразных функции в случаях, непосредственно сводящихся к применению таблицы первообразных и правил интегрирования

*Понятие интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.*

Понятия: интеграла, подынтегральной функции, переменной интегрирования; обозначение интеграла;

Формула Ньютона-Лейбница

*Метод замены переменных*

Нахождение интегралов методом замены переменных

*Метод интегрирования по частям*

Нахождение интегралов методом интегрирования по частям

*Задача о площади криволинейной трапеции.*

Определение криволинейной трапеции, формула вычисления площади криволинейной трапеции

*Вычисление площадей фигур с помощью интеграла.*

Нахождение площадей фигур, ограниченных графиками различных функций

# Основные сведения из теории

# ***8.1.Определение первообразной***

Определение: Функция F(х) называется первообразной для функции f(х) на промежутке х , если для любого х из этого промежутка выполняется равенство

F ′(x)=f(х)

Обозначение: Если **f(х)-**функция, то **F(x)** – её первообразная

Определение: Операция вычисления первообразной называется интегрированием.

Теорема: Если F(х) – первообразная для функции f(х) на промежутке х, то у функции f(х) существует бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид F(х) +С, где С- произвольная постоянная (число).

***8.2. Таблица первообразных***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Функция f(х) | Первообразная F(х) |
| 1 | к (где к – число) | к∙х+С |
| 2 | хр (р≠-1) |  |
| 3 | (х>0) | lnx +C |
| 4 | ех | ех+С |
| 5 | sinx | -cosx+C |
| 6 | cosx | sinx+C |
| 7 | ах |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |

# ***8.3 Правила нахождения первообразных***

1. Если F(х) первообразная для функции f(х) , а G(х) – первообразная для функции g(х) , то F(х)+ G(х) первообразная для f(х) +g(х);
2. Если F(х) первообразная для функции f(х) и к- постоянная, то к∙F(х) первообразная для к∙f(х);
3. Если F(х) первообразная для функции f(х) и к,b – постоянные, причём к≠0, то ∙F(кх+b)- первообразная для f(кх+b).

# ***8.4***. ***Понятие интеграла***

Обозначение:  (читается: интеграл от а до в эф от икс дэ икс)

Числа а, в, называются пределами интегрирования

***8.5. Формула Ньютона – Лейбница:***



Т.е. для вычисления интеграла необходимо:

1. найти первообразную;
2. подставить в первообразную число в;
3. поставить знак -;
4. подставить в первообразную число а;
5. вычислить.

###### *8.6. Функции и графики*

**А) Линейная функция:**

Определение: **Линейной функцией** называется функция вида у = кх +в

Графиком линейной функции является прямая.

Для построения прямой необходимо две точки:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| х |  |  |
| У |  |  |

у=х



**Б) Квадратичная функция**

Определение: **Квадратичной функцией** называется функция вида

у = ax² + bx + c

Графиком линейной функции является парабола

Для построения необходимо определить:

1) направление ветвей :

* если а>0, то ветви вверх
* если а<0, то ветви вверх
* 2) вершина (х0, у0) : х0 = - , у0 = у(х0)

у=х2



***8.7. Алгоритм нахождения площади фигуры с помощью интеграла***

1. Построить графики функций и найти точки пересечения;
2. Выделить (заштриховать) на чертеже искомую фигуру;
3. Записать формулу вычисления площади;
4. Вычислить значение интегралов.

**Случай 1**  **Случай 2 Случай 3**

у=f(х)

у=f2(х)

у=f1(х)

S=

S=

у=f(х)

S=-

у=f1(х)

у=f2(х)

2. Примеры и упражнения

**Пример 1:** Вычислить первообразную

1. f(х)=2х5

F(х)=

1. f(х)=14х6

F(х)=

1. f(х)=х4-3х2+6х+7



**4**) f(х)=6х7-13х6+3х2



**5)** f(х)= =34х-10



1. f(х)=



**Пример 2:** Вычислить интеграл:



**2)**



**3)**



**Пример3:** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:у= 6-х, ось ОХ, х=3,х=5

Решение:

у= 6-х, линейная функция, график – прямая

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 |
| у | 5 | 4 |

Получили, что прямая проходит через точки (1;5) (2;4)



Тогда (случай 1):



Ответ: S=4ед2

**Пример4**: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

f(х) = х2-8х+16, f(х)=-х+6

Решение:

1) Построим графики функций, заданных в условии

f(х) = х2-8х+16

График парабола

Для построения:

а)т.к. 1>0, то ветви вверх

в) вершина (х0, у0) : х0 = -=- ,

у0 = у(х0)=у(4)= 42-8·4+16=16-32+16=0, т.е. вершина (4;0)

f(х)= -х+6

График прямая.Для построения:

у(1)= -1+6=5

у(2)= -2+6=4, таким образом получили точки:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 |
| У | 5 | 4 |

(1;5), (2;4)

Строим график:



Случай 3, тогда: 





S=7,5-3=4,5 ед2

Ответ: S=4,5 ед2

**8.Варианты контрольной работы**

**Задание 8.1:** Вычислить первообразную

**Вариант 1:** f(x) = 3х ³-4х²+15sinх **Вариант 6:** f(х) = 

**Вариант 2:** f(х) =12х3- **Вариант 7:** f(х) = 

**Вариант 3:** f(х) = 12х6-6х5-10х4+4х3-4х2+6 **Вариант 8:** 

**Вариант 4:** f(х) =  **Вариант 9:** f(х) = 

**Вариант 5:** f(х) = 4sinx –5cosx +ех  **Вариант 10:** f(х) = 

**Задание 8. 2:** Вычислить интеграл

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1:** |  |  | **Вариант 6:** |  |  |
| **Вариант 2:** |  |  | **Вариант 7:** |  |  |
| **Вариант 3:** |  |  | **Вариант 8:** |  |  |
| **Вариант 4:** |  |  | **Вариант 9:** |  |  |
| **Вариант 5:** |  |  | **Вариант 10:** |  |  |

**Задание 8.3:** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

**Вариант 1:** у=х2-8х+18, ось ОХ **Вариант 6:** у=-х2+8х-11, у=х-1

**Вариант 2:** у=6-х, ось ОХ, х=3, х=5 **Вариант 7:** у=х2-4х+4, у=4-х

**Вариант 3:** у=-х2+4х+1, у=х+1 **Вариант 8:** у=2х2-12х+19, ось ОХ

**Вариант 4:** у=4-х, ось ОХ, х=1, х=3  **Вариант 9:** у = -х+1, ось Ох, ось Оу

**Вариант 5:** у=х2-8х+16, у=6-х **Вариант 10:** у=-х2+4х-2, у=х2-4х+4

****Содержание темы** «**Элементы теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики**»

*Предмет комбинаторики. Цели и задачи комбинаторики. Общие правила комбинаторики.*

Цели и задачи комбинаторики, общие правила, сведения из истории комбинаторики, связь с другими науками. Основные понятия комбинаторики

*Основные комбинаторные понятия и формулы.*

Определение факториала, сочетаний, размещений, перестановок элементов. Комбинаторные задачи.

*Формула бинома Ньютона.*

Формула Ньютона и основные следствия. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля

*Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей*

Классическое и статистическое определения вероятности;

теоремы сложения и умножения вероятностей; формула полной вероятности;

*Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины*

Понятие дискретной случайной величины и закон ее распределения;числовые характеристики дискретной случайной величины.

*Представление данных (таблицы, диаграммы, графики).*

Разные виды диаграмм, использование диаграмм, таблиц, графиков

*Генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.*

Среднее значение (среднее арифметическое) набора;наибольшее и наименьшее значения набора чисел, его размах;отклонения от среднего арифметического и дисперсия;

# Основные сведения из теории

* 1. ***Определение вероятности***

**Теория вероятностей** занимается исследованием вероятностных закономерностей массовых однородных явлений, многие её практические приложения используются в **математической статистике**.

*Определение:* **Вероятностью события А** называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

 - *классическое определение вероятности*.

* 1. ***Основные формулы комбинаторики***

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы **комбинаторики** – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества.

**Перестановки**

*Определение* **Перестановки**– это комбинации, составленные из всех *п* элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок:

*Рп* *= п*! (n факториал) *п*!=1∙2∙3∙4∙…….∙n

**Размещения**

*Определение:* **Размещения** – комбинации из *т* элементов множества, содержащего *п* различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений 

**Сочетания**

*Определение:* **Сочетания** – неупорядоченные наборы из *т* элементов множества, содержащего *п* различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов).

Число сочетаний 

* 1. ***Формула Бернулли***

. , где

n – число опытов А; к – число наступления события А; р- вероятность события А;q – вероятность не наступления события А (q=1-р);

* 1. ***Определения теории математической статистики***

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется и более удобное понятие *случайной величины*.

*Определение:* **Случайной величиной** называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (*Х, Y,Z,…*), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (*xi, yi,…*).

Случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

*Определение:* Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

*Определение :*  Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

**Дискретные случайные величины.**

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется **законом распределения** случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется **рядом распределения**:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* | … |
| *pi* | *p*1 | *p*2 | … | *pn* | … |

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде **многоугольника распределения** – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (*xi, pi*).

*x*1 *x*2 *x*3 *x*4 *x*5

* 1. ***Математическое ожидание случайной величины***

*Определение:* **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

*М*(*Х*) = *х*1*р*1 + *х*2*р*2 + … + *хпрп .*

**Свойства математического ожидания**

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

*М*(*С*) = *С.*

1. Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:

*М*(*СХ*) = *С М*(*Х*).

1. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

*M*(*XY*) = *M*(*X*)∙*M*(*Y*)

1. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

*M* (*X + Y*) = *M* (*X*) + *M* (*Y*)

* 1. ***Дисперсия***

*Определение:* **Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

*D*(*X*) = *M* (*X – M*(*X*))².

Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии:

*D*(*X*) = *M*(*X* ²) – *M* ²(*X*)

**Свойства дисперсии**

1. Дисперсия постоянной величины *С* равна нулю:

*D* (*C*) = 0.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

*D*(*CX*) = *C*²*D*(*X*)

1. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

*D*(*X + Y*) = *D*(*X*) + *D*(*Y*).

1. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

*D*(*X – Y*) = *D*(*X*) + *D*(*Y*).

* 1. ***Среднее квадратическое отклонение***

*Определение:* **Средним квадратическим отклонением** σ случайной величины *Х* называется квадратный корень из дисперсии: .

2. Примеры и упражнения

**Пример 1:** Вычислить 7!

Решение:

7! = 2·3·4·5·6·7 = 5040

Ответ: 7! = 5040

**Пример2**: Вычислить 

Решение:



Ответ: 2517

**Пример3:** Вычислить 



**Пример 4:** Вычислить. 

**Пример 5:** Решить задачу:В группе 15 студентов. Из них 8 юношей, 7 девушек. Какова вероятность выхода из кабинета девушки Р1(А), какова юноши Р2(А)?

Решение:

Пусть n – (число возможных исходов) –количество студентов в группе , тогда n=15

m1=7 - число благоприятных исходов выхода девушек;

m2=8 - число благоприятных исходов выхода юношей;

Вероятность выхода девушек из кабинета:

Вероятность выхода юношей из кабинета: 

Ответ: Р1(А)=0,47 Р2(А)=0,53

**Пример 6:** Решить задачу:В группе студентов 9 блондинов, 4 брюнета и 2 лысых. Подсчитать вероятность выхода из кабинета человека с волосами на голове.

Решение: Всего в группе 9+4+2=15 человек

Вероятность выйти блондину Р1= брюнету Р2=

Тогда искомая вероятность Р= Р1+Р2=

Ответ: Вероятность около 0,87

**Пример 7:** Решить задачу:

В группе студентов 15 человеке. Формируется бригада из 4 человек для участия в олимпиаде по математике. Какое число вариантов возможно?

Решение:



Ответ: 32760 вариантов.

**Пример 8:** Решить задачу

В студенческой группе из 15 человек требуется найти пару учащихся для поощрения стипендией. Какое количество сочетаний возможно?

Решение:

вариантов

Ответ: 105 вариантов

**Пример 9:** Решить задачу:

Какова вероятность того, что при 4 подбрасываниях игрального кубика число три появится ровно 2 раза.

Решение:

n = 4 (4 опытов (подбрасывания)) к= 2 (число наступления события (появления числа три))

Вероятность р= (так как 6 граней в кубике) .Невероятность q= 1- = 

Подставим в формулу Бернулли:

Ответ: Вероятность Р=0,12

**Пример 10:** Найти математическое ожидание величины Х, заданной законом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 2 | 3 | 5 | 8 |
| Р | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,58 |

Решение:

М(Х)= *х*1*р*1 + *х*2*р*2 + *х*3*р*3 + *х*4*р*4 =2∙0,2+3∙0,1+5∙0,4+8∙0,58=7,34

Ответ: М(Х)=7,34

**Пример 11:** Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины, заданной своей таблицей распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 2 | 3 | 5 |
| Р | 0,1 | 0,3 | 0,5 |

Решение:

Вычислим математическое ожидание М(Х)

М(Х)= 2∙0,1+3∙0,3+5∙0,5=0,2+0,9+2,5=3,6

Вычислим математическое ожидание М(Х2)

М(Х2)= 22∙0,1+32∙0,3+52∙0,5=0,4+2,7+12,5=15,6

Подставим М(Х) и М(Х2) в формулу для дисперсии:

*D*(*X*) = *M*(*X* ²) – *M* ²(*X*)=15,6-(3,6)2=15,6-12,96=2,64

Подставим *D*(*X*) в формулу для среднего квадратического отклонения=1,62

Ответ: *D*(*X*)=2,64, σ=1,62

**Варианты контрольной работы**

**Задание 9.1:** Вычислить, используя формулы комбинаторики

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1:** | **1)** | **2)** | **Вариант 6:** | **1)** | **2)** |
| **Вариант 2:** | **1)** | **2)** | **Вариант 7:** | **1)** | **2)** |
| **Вариант 3:** | **1)** | **2)** | **Вариант 8:** | **1)** | **2)** |
| **Вариант 4:** | **1)** | **2)** | **Вариант 9:** | **1)** | **2)** |
| **Вариант 5:** | **1)** | **2)** | **Вариант 10:** | **1)** | **2)** |

**Задание 9.2:** Решить задачу

**Вариант 1:** Из группы людей в количестве 20 человек нужно выбрать подгруппу в количестве 7 человек. Сколькими сочетаниями это возможно сделать?

**Вариант 2:** Какова вероятность того, что при 7 подбрасываниях кубика число пять появится ровно 3раза?

**Вариант 3:** В ясельной группе из 10 человек нужно выбрать 4-х человек для наблюдения за остальными детьми. Какое количество сочетаний возможно?

**Вариант 4:** Какова вероятность того, что при 5 подбрасываниях игрального кубика число два появится ровно 3 раза?

**Вариант 5:** Какое количество вариантов выбрать из мешка с 15 яблоками 6 красных?

**Вариант 6:** Игральный кубик подброшен 11 раз. Найти вероятность выпадения шестёрки 5 раз.

**Вариант 7:** Какова вероятность того, что при 8 подбрасываниях кубика число один появится ровно 5раз?

**Вариант 8:** Из группы людей в количестве 12 человек нужно выбрать подгруппу в количестве 5 человек. Сколькими сочетаниями это возможно сделать?

**Вариант 9:** Из стоявших на остановке 20 человек нужно выбрать 7-х, которые не влезут в маршрутное такси. Какое сочетание людей возможно?

**Вариант 10:** Игральный кубик подброшен 12 раз. Найти вероятность выпадения пятерки 3 раза.

**Задание9. 3:** Вычислить математическое ожидание суммы  *M* (*X + Y*) и произведения *M*(*X∙Y*) ; сумму *D*(*X + Y*) и разность *D*(*X – Y*) дисперсий Х и Y , а также найти их квадратическое отклонение σ(Х) и σ(Y).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант**  **1:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 2 | 3 | 4 | | Р | 0,2 | 0,5 | **0,3** | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 1 | 3 | 7 | | Р | 0,3 | 0,1 | 0,6 | | **Вариант**  **6:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 2 | 4 | 9 | | Р | 0,2 | 0,6 | 0,2 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 2 | 3 | 6 | | Р | 0,2 | 0,3 | 0,5 | |
| **Вариант**  **2:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 1 | 5 | 4 | | Р | 0,2 | 0,5 | 0,3 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 2 | 3 | 4 | | Р | 0,1 | 0,5 | 0,4 | |  |  |  |  | | **Вариант**  **7:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 6 | 7 | 8 | | Р | 0,2 | 0,6 | 0,2 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 1 | 2 | 3 | | Р | 0,4 | 0,5 | 0,1 | |
| **Вариант**  **3:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 3 | 6 | 7 | | Р | 0,3 | 0,7 | 0 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 1 | 6 | 9 | | Р | 0 | 0,2 | 0,8 | | **Вариант**  **8:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 6 | 8 | 9 | | Р | 0,2 | 0,4 | 0,4 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 11 | 12 | 13 | | Р | 0,5 | 0,2 | 0,3 | |
| **Вариант**  **4:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 2 | 7 | 8 | | Р | 0,1 | 0,2 | 0,7 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 1 | 8 | 9 | | Р | 0,2 | 0,5 | 0,3 | | **Вариант**  **9:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 2 | 4 | 7 | | Р | 0,4 | 0,6 | 0 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 12 | 6 | 7 | | Р | 0,5 | 0,1 | 0,4 | |
| **Вариант**  **5:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 3 | 4 | 8 | | Р | 0,2 | 0,8 | 0 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 1 | 6 | 9 | | Р | 0,4 | 0,3 | 0,3 | | **Вариант**  **10:** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Х | 1 | 2 | 8 | | Р | 0,6 | 0,4 | 0 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Y | 5 | 8 | 9 | | Р | 0,2 | 0,8 | 0 | |

Литература

Основные источники:

1. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
2. «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;
3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2000.
4. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. – М., 2003.

Дополнительные источники:

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл. – М., 2005.
2. Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 11 кл. – М., 2005.
3. Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М., 2005.
4. Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб. пособие. – М., 2004.
5. Башмаков М.И. Математика: учебник для 10 кл. – М., 2004.
6. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2000.
7. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2003.
8. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2003.
9. Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2004.

Интернет-ресурсы*:*

[www.ege66.ru](http://www.ege66.ru)

[www.edu.ru](http://www.edu.ru)

[www.uraledu.ru](http://www.uraledu.ru)

[www.minobraz.ru](http://www.minobraz.ru)

[www.mathtest.ru](http://www.mathtest.ru)

www.allmatematika.ru

www.ega-math.narod.ru

www1.ege.edu.ru/online-testing/math/

www.mathnet.spb.ru

[www.exponenta.ru/](http://www.exponenta.ru/)